

السؤال الأول (٥٥٠): لوكن لدينا المتكامل والجاءات التالية:

$$f(x, y) = a x y e^{-(x+y)}; x, y > 0 \rightarrow F(x) = b \cdot \frac{5^x}{x!}; x = 0, 1, \dots$$

المطلوب:

- ١- احسب للثابتة a حتى تكون الدالة الاولى دالة كثافة احتمالية!
- ٢- ادرس استقلال المتحولين المعرفين بتلك الدالة!
- ٣- اوجد تشتت المتحولين وتغايرهما ومعامل ارتباطهما وتشتت مجموعهما!
- ٤- احسب للثابتة b حتى يكون القانون الثاني قانون احتمالي!
- ٥- اوجد الدالة المولدة للقانون الثاني ثم توقع وتشتت المتحول الموافق!

السؤال الثاني (٤٣٠):

- لوكن (X) متحول عشوائي طبيعي وسيطاء : σ^2, μ, ρ و المطلوب :
- ١) اكتب القانون الاحتمالي لهذا المتحول متحققاً من ذلك
 - ٢) اوجد توقع هذا المتحول
 - ٣) قدر الوسيط للممثل للتوقع وبين نوعية التقدير!

السؤال الثالث (٥٢٠):

استنتج مايلي:

١- قانون الاحتمال التام (الأحداث الشاملة)

٢- صيغة بايز.

انتهت الأسئلة

حمن ٢٠١٨/١/١٧

د. مصطفى حداد

مع تمنياتي بالتوفيق

السؤال الأول - ٥٠ :- (١) - ٧ :-

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow a \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \right] \left[\int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy \right] = \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$

$$f(x, y) = 4x.y.e^{-(x^2+y^2)}; x, y > 0$$

(٢) - ١٣ :-

$$f(x, y) = a.x.y.e^{-(x^2+y^2)}; x, y > 0 \text{ --- } F(x) = b.\frac{5^x}{x!}; x = 0, 1, \dots$$

$$f(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = 4ye^{-(y^2)} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \right] = 2ye^{-(y^2)};$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 4xe^{-(x^2)} \left[\int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy \right] = 2xe^{-(x^2)};$$

$$f(x).f(y) = \left(2xe^{-(x^2)} \right) \cdot \left(2ye^{-(y^2)} \right) = 4.x.y.e^{-(x^2+y^2)}.$$

فالمحولان مستقلان.

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y.f(y) dy = 2 \left[\int_0^{\infty} y^2 e^{-(y^2)} dy \right] = \left[\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad (٣) - ٢٠ :-$$

$$E(Y)^2 = \int_0^{\infty} y^2.f(y) dy = 2 \left[\int_0^{\infty} y^3 e^{-(y^2)} dy \right] = \left[\int_0^{\infty} u e^{-u} du \right] = 1;$$

$$Var Y = E(Y)^2 - (E(Y))^2 = 1 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow Var X = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

$$cov(X, Y) = 0 = \rho(X, Y) \Rightarrow Var(X + Y) = 2 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1 \Rightarrow b \sum_{x=0}^{\infty} \frac{5^x}{x!} = 1 \Rightarrow b.e^5 = 1 \Rightarrow b = e^{-5} \quad (٤) - ٥٠ :-$$

$$U_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\alpha} F(x) = e^{-5} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(5.e')^x}{x!} = e^{(5.e')-5}. \quad (٥) - ٥٠ :-$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; x \in \mathbb{R}$$

الجواب الثاني (٣٠) :- ١ - (١٠) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

٢- (١٠):

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \mu; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}, \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 \end{aligned}$$

$$EX|_{\mu=\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X} \Rightarrow \text{٣- (٢٠): لدينا بحسب طريقة العزوم:}$$

$$E \hat{\mu} = E \bar{X} = E \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var \hat{\mu} = Var \bar{X} = Var \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Var X_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$Var \hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

فالتقدير منصف ومتسق.

الجواب الثالث (٢٠ د): ليكن $(H_i); i=1, 2, \dots, n$ أحداث تشكل تجزئة للحدث الأكيد، وبفرض لدينا حدث يتعلق بالاختبار

، ليكن (A):

الافتراض: بما أن الحوادث H_1, H_2, \dots, H_n تشكل تجزئة لفضاء العينة:

$$\begin{aligned} A &= A \cap S = A \cap [H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n] \\ &= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n) \end{aligned}$$

و هذه التجزئة هي A وبالتالي أصبح لدينا من جديد تجزئة أخرى و لكن للحدث

و بحسب خواص تابع الاحتمال فإن: $A \cap H_1, A \cap H_2, \dots, A \cap H_n$

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)] \\ &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

٢- (١٠):

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \mu; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}, \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 \end{aligned}$$

$$EX|_{\hat{\mu}=\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X} \Rightarrow \text{٣- (٢٠): لدينا بحسب طريقة العزوم:}$$

$$E \hat{\mu} = E \bar{X} = E \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var \hat{\mu} = Var \bar{X} = Var \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Var X_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var \hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

فالتقدير منصف ومتسق.

الجواب الثالث (٢٠د): ليكن $(H_i); i=1,2,...,n$ أحداث تشكل تجزئة للحدث الأكيد، وبفرض لدينا حدث يتعلق بالاختبار

، ليكن (A) :

البرهان: بما أن الحوادث $H_1, H_2, ..., H_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة:

$$\begin{aligned} A &= A \cap S = A \cap [H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n] \\ &= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n) \end{aligned}$$

و هذه التجزئة هي A بالتالي أصبح لدينا من جديد تجزئة أخرى و لكن للحدث

و بحسب خواص تابع الاحتمال فإن: $A \cap H_1, A \cap H_2, ..., A \cap H_n$

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n)] \\ &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + ... + P(A \cap H_n) \end{aligned}$$

اسم الطالب:
المدة: ٩٠ د

سلم درجات امتحان الاحصاء والاحتمال
العام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨ ف ١

جامعة البعث كلية العلوم
الصف الأول - رياضيات

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$$

و منه نجد:

ونحصل على صيغة بايز اعتماداً صيغة الأحداث الشاملة:
نعلم بحسب قاعدة الاحتمال الشرطي أن:

$$P_A(H_k) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)} ; k = 1, 2, \dots, n$$

وبحسب صيغة الأحداث الشاملة فإننا نجد:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} ; k = 1, 2, \dots, n$$

انتهت الأجوبة

د. مصطفى حسن

حمص ٢٠١٨/١/١